杠杆型 ETF 的价值波动特征研究

报告摘要:

- **杠杆型 ETF 的特征与优势**

杠杆型 ETF 可以被视为一种“灵动”的分级杠杆基金，凭借工具合成杠杆的灵活性，将“A 级份额”的角色从原先绑定的配对关系中虚化或者抽离，因而“B 级份额”可以随时寻找所需的“A 级份额”并动态调整所需的数量，真正实现稳定的杠杆倍数，同时又可实时申购赎回，有效解决了分级杠杆基金杠杆倍数不稳定以及折溢价率波动过大的缺陷。

- **价值波动路径模型**

杠杆型 ETF 持有期末的组合价值受到目标杠杆倍数和标的指数波动特征的影响，目标杠杆倍数是完全外生给定的，而标的指数波动特征的影响又包括标的指数的期末涨幅和标的指数期间瞬时波动率的变动两个方面，因此杠杆型 ETF 持有期末的组合价值并非完全是由标的指数的期末涨幅确定的，而是还依赖于标的指数瞬时波动率的波动路径。

- **模型的适用性检验**

从检验结果的数值上来看价值波动路径模型对日调仓组合的净值估计具有适用性。模型的累计估计偏差来自于两方面的贡献，即连续与离散时间过程下组合调整的差异和对标的指数波动率的估计偏差。模型倾向于高估正向杠杆型组合的单位净值，而低估反向杠杆型组合的单位净值。

- **杠杆型 ETF 的价值波动特征**

（1）Gamma 与 Theta

杠杆型 ETF 具有多头 Gamma 特征，对组合价值形成一种向上的拉升。由于标的指数波动率的存在，Theta 对组合价值形成一种向下的拖拽，即获取 Gamma 红利需要支付 Theta 成本，因此 Gamma 与 Theta 对组合价值变动的净贡献本质上就是两种力量相互“角力”的结果。若假设标的指数的价格波动服从正态分布且参数估计无偏，那么 Gamma 与 Theta 对组合价值变动的净贡献为正的概率不低于 31.73%，且净贡献的期望水平非负。

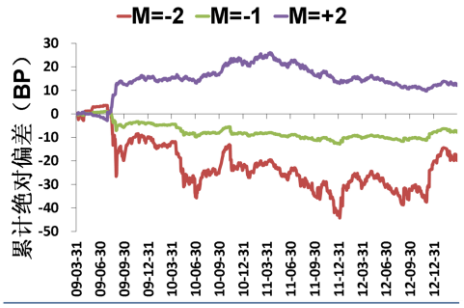
（2）波动率与波动率的波动

不仅标的指数波动率的存在会对组合价值形成一种向下的拖拽，而且标的指数波动率的时变性也会对组合价值的变动产生影响。杠杆型 ETF 不仅具有空头 Vega 特征，即做空标的指数的波动率，因此标的指数波动率的高企将耗损组合价值，而且杠杆型 ETF 也做空标的指数波动率的波动。

- **风险提示**

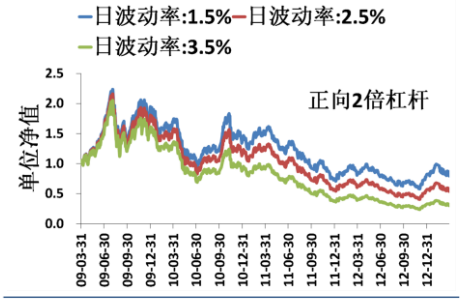
本文中所涉及的假设以及基于假设所构建的模型，均是对所要研究问题的主要矛盾以及矛盾主要方面的一种抽象，因此模型以及基于模型所得出的相关结论并不能完全准确的刻画现实环境与预测未来。

图 1：价值波动路径模型的估计偏差



数据来源：Wind 资讯、广发证券发展研究中心

图 2：标的指数波动率变化的影响



数据来源：Wind 资讯、广发证券发展研究中心

分析师： 叶 涛 S0260512030002
021-60750623
yetao@gf.com.cn

相关研究:

目录索引

一、分级杠杆基金与杠杆型 ETF 4
1.1 杠杆的等效合成 4
1.2 分级杠杆基金 5
1.3 杠杆型 ETF 7
1.4 公募基金产品的工具化时代 8
二、杠杆型 ETF 的价值波动路径 9
2.1 杠杆构建方式 9
2.2 价值波动路径模型 9
2.3 模型的适用性检验 12
三、杠杆型 ETF 持有收益率的分解 14
3.1 线性变动与切线特征 15
3.2 GAMMA 与 THETA 15
3.3 波动率与波动率的波动 18
3.4 持有收益率的分解 19

图表索引

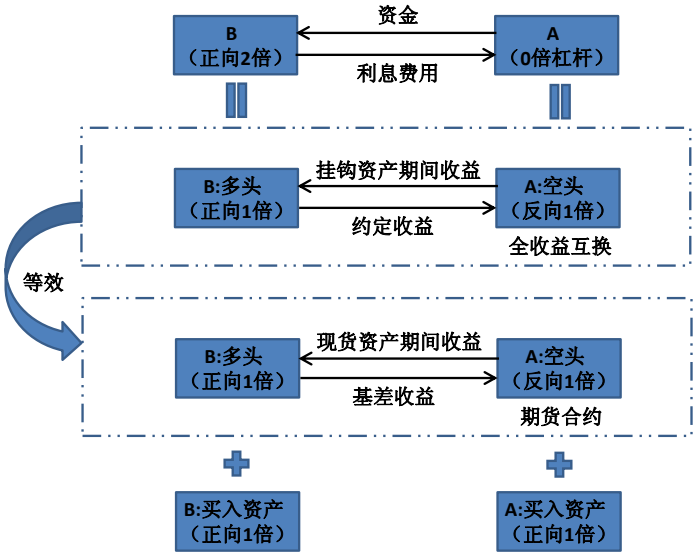
图 1：正向杠杆的等效合成.....4
图 2：两级份额配对转换的套利空间<截面中位数>.....6
图 3：两级份额的相对溢价率<截面中位数>.....6
图 4：两级份额的相对流动性<截面中位数>.....7
图 5：静态配对结构导致的杠杆倍数不稳定.....8
图 6：价值波动路径模型的累计绝度偏差.....13
图 7：价值波动路径模型的累计相对偏差.....13
图 8：组合价值变动的切线特征<正向杠杆型组合>.....15
图 9：Gamma 和 Theta 对组合价值变动的净贡献.....16
图 10：净贡献为正的概率与净贡献期望水平的对应关系.....17
图 11：标的指数波动率的变化对组合价值的影响<正向 2 倍杠杆>.....18

一、分级杠杆基金与杠杆型 ETF

1.1 杠杆的等效合成

杠杆源于资金的借贷（正向杠杆）或者资产的借贷（反向杠杆），用于放大或者产生方向性收益。不仅一些交易工具中内嵌了杠杆，如看涨期权隐含了远期融资买入资产形成的正向杠杆，看跌期权隐含了远期卖空资产形成的反向杠杆，而且我们也可以通过选择合适的工具来合成正向或者反向杠杆。

图1：正向杠杆的等效合成



数据来源：广发证券发展研究中心

图1是以合成正向杠杆为例，那么只要稍作变换也同样可以用来合成反向杠杆。图1中的B直接向A借入等量的自有资金后买入资产构建正向2倍杠杆，期末按确定的利率向A支付利息费用，B的这种杠杆结构当然也可以通过全收益互换或者期货合约来合成。

（1）全收益互换

A、B双方签订（场外）全收益互换协议，A向B支付挂钩资产的期间收益，而B向A支付基于市场基准利率加点确定的收益，协议的名义本金数量即为B的自有资金数量，期末以轧差方式来确定双方实际的收益支付方向与数量。

（2）期货合约

A、B双方互持（场内）期货合约的空头与多头部位，合约定价为现货价格与基差的加总，双方期末的损益即为现货资产的期间收益与基差收益的轧差，等价于A向B支付现货资产的期间收益，而B向A支付基差收益。

在订立了全收益互换或者期货合约后，A持有了反向1倍杠杆，B持有了正向1倍杠杆，同时B再以自有资金买入现货资产，叠加形成正向2倍杠杆；而A为了对冲风

险、锁定收益也将原本需直接出借给B的资金买入现货资产，叠加形成0倍杠杆。

对于B而言，3种形式所构建的杠杆结构是完全等效。B在资金借贷中直接支出的利息费用，在全收益互换中轧差支出的约定收益，在期货合约中隐含支出的基差收益，三者并无本质区别，只是以不同的形式存在而已。

1.2 分级杠杆基金

分级杠杆基金是按固定的份额配对比例将基础份额拆分为A级份额与B级份额，B级份额借入A级份额的所有资金后配置股票资产构建1倍以上的正向杠杆；A级份额向B级份额收取约定收益，形成0倍杠杆。

在所有36只股票型分级杠杆基金（截止2013-3-8）中有31只的基础份额采用被动型（指数化）投资，其余5只的基础份额采用主动型投资；有34只股票型分级杠杆基金的基础份额以资金借贷（财务融资型）关系拆分为两级份额，约定年收益率的均值为6.43%；B级份额的初始杠杆倍数设定为正向2倍的有23只，设定为正向1.67倍的有12只，设定为正向1.25倍的仅有1只。

为了检验两级份额的整体定价偏离、单级份额的定价偏离以及两级之间的相对定价权，我们构建以下3个检验指标：

（1）两级份额配对转换的套利空间：

$$\varepsilon_{i,t}=\left|\frac{P_{i,t}^{A}(\eta_i-1)+P_{i,t}^{B}}{V_{i,t}^{A}(\eta_i-1)+V_{i,t}^{B}}-1\right| \qquad \text{式(1)}$$

（2）两级份额的相对溢价率（B级份额相对于A级份额）：

$$\gamma_{i,t}=\frac{P_{i,t}^{B}}{V_{i,t}^{B}}-\frac{P_{i,t}^{A}}{V_{i,t}^{A}} \qquad \text{式(2)}$$

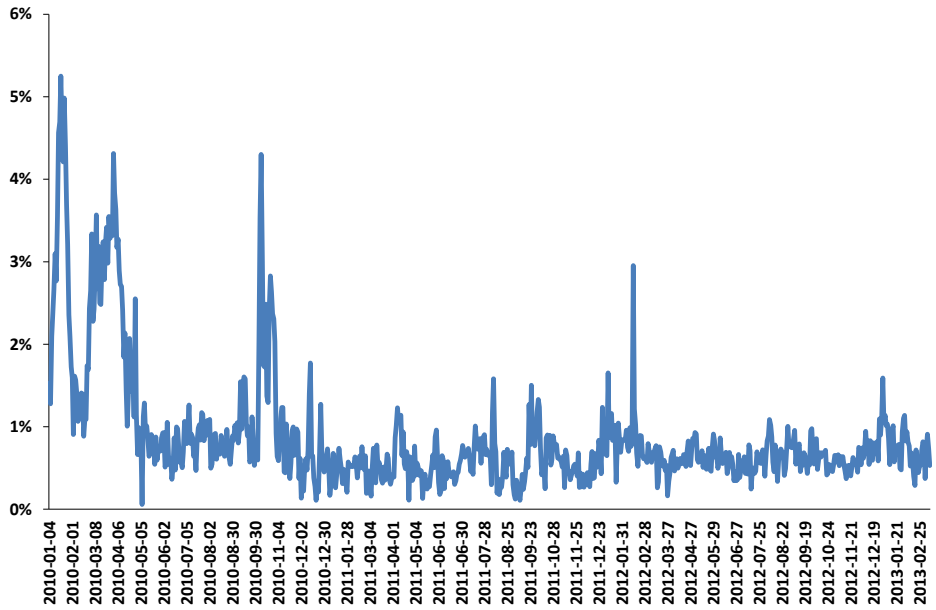
（3）两级份额的相对流动性（B级份额相对于A级份额）：

$$\delta_{i,t}=2\frac{VOL_{i,t}^{B}(1-\eta_i)-VOL_{i,t}^{A}}{VOL_{i,t}^{B}(1-\eta_i)+VOL_{i,t}^{A}} \qquad \text{式(3)}$$

其中：i 为分级杠杆基金的编号，$V_{i,t}^{A},V_{i,t}^{B}$ 为第 i 只基两级份额的 t 日参考净值，$P_{i,t}^{A},P_{i,t}^{B}$ 为第 i 只基两级份额的 t 日收盘价，$VOL_{i,t}^{A},VOL_{i,t}^{B}$ 为两级份额的 t 日成交量，η_i 为第 i 只基金B级份额的初始杠杆倍数。

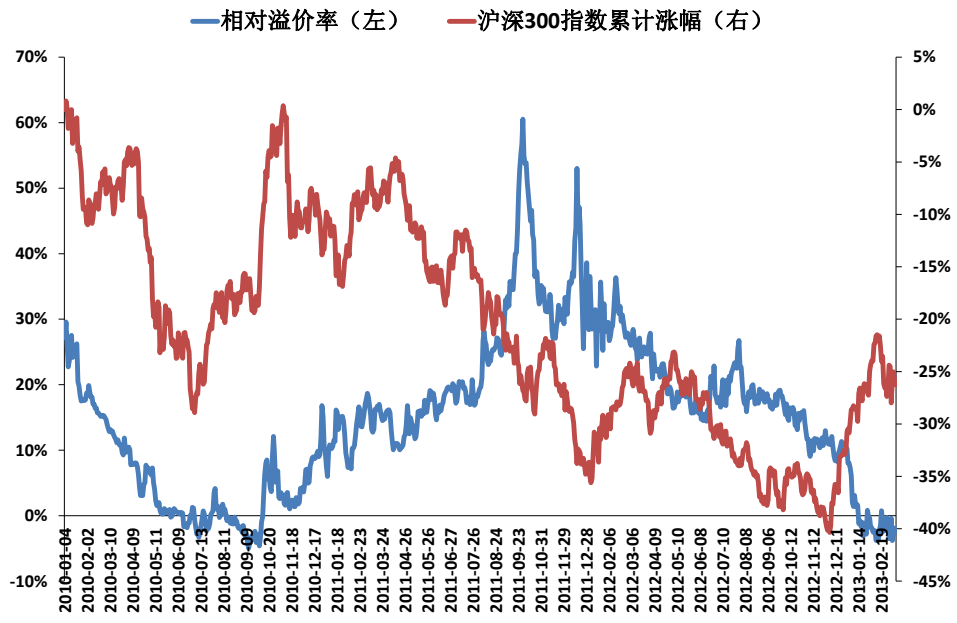
我们对 t 日两级份额已上市交易且当日均有成交的分级杠杆基金分别计算以上3个检验指标，检验区间为2010-01-04至2013-03-29，据此得到每个检验指标的 t 日截面中位数并形成序列。

图2：两级份额配对转换的套利空间<截面中位数>



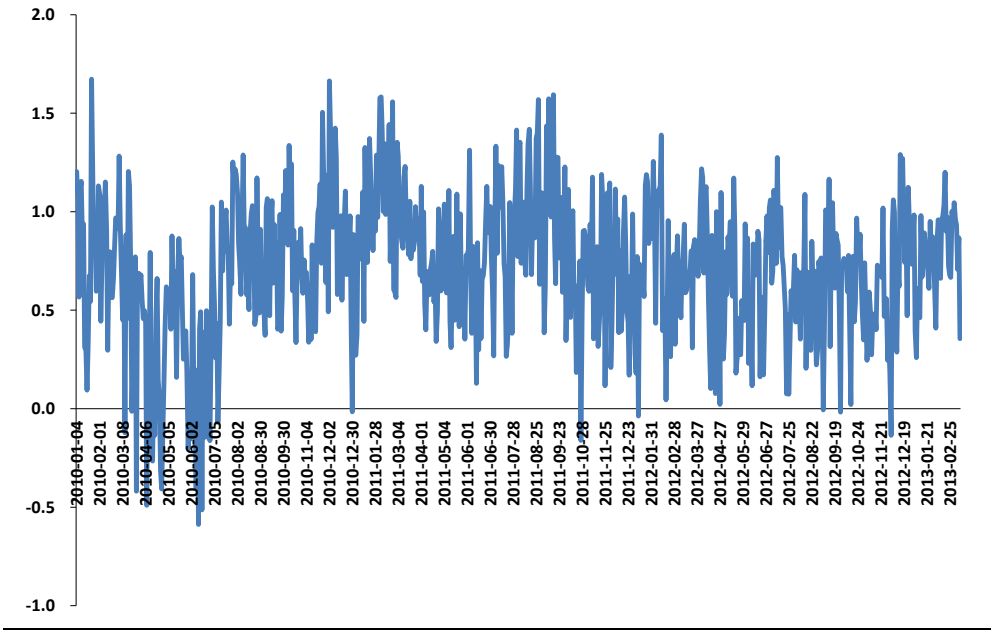
数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图3：两级份额的相对溢价率<截面中位数>



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图4：两级份额的相对流动性<截面中位数>



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

若按日波动2%计算，即使不考虑交易成本，3.3%的整体定价偏差才能对应90%的套利胜率。如图2所示，在大多数时间内分级杠杆基金的套利机会并不大，配对转换机制对两级份额整体定价水平的约束较为有效。

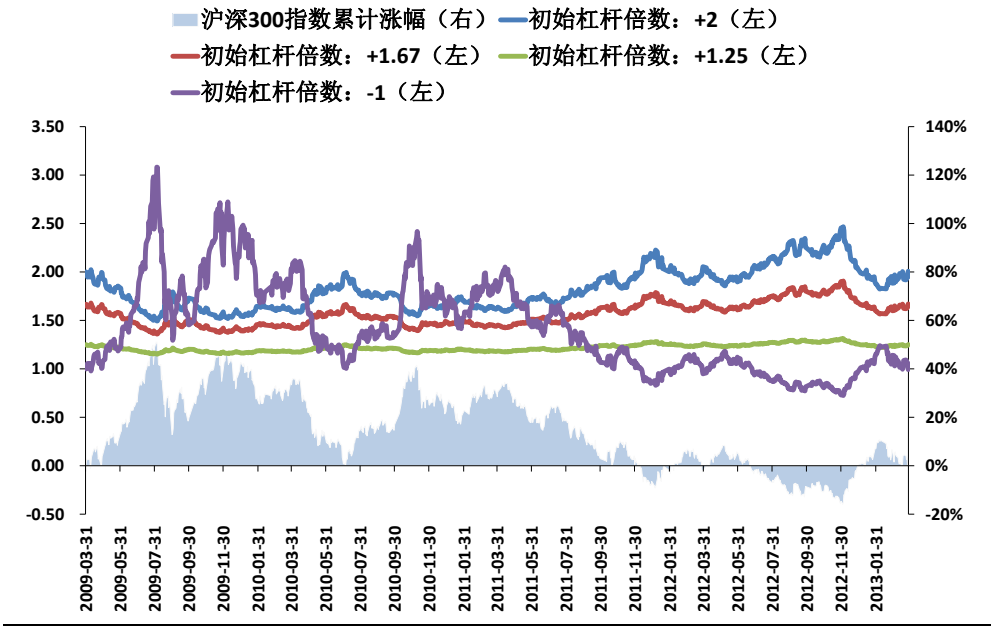
如图3所示，由于缺乏单级份额的申赎机制，参考净值无法实时兑现，两级份额相对溢价率的时变性较强、波动较为、剧烈，且与市场整体走势之间也没有特别稳定的规律，但在大多数时间内B级份额处于溢价交易状态。如图4所示，在大多数时间内B级份额的场内流动性显著的高于A级份额的场内流动性，说明B级份额享有了相对定价权，即B级份额的场内定价决定了A级份额的场内定价。同时，以上两点也能说明普通投资者对于B级份额这类低准入门槛的杠杆交易工具有着很强的需求。

1.3 杠杆型 ETF

分级杠杆基金按固定的份额配比绑定了两级份额，单级份额无法从这种绑定的配对关系中抽离，这种静态的配对结构只可能稳定的维持正向1倍或者0倍杠杆，但可以确保管理人无需承担基础份额层面上的风险敞口。除了不定期折算触发以外，B级份额无法依据自身的需要调整向A级份额的借款额度，也等效于无法调整全收益互换中名义本金的数量或者期货合约的持仓数量，因此B级份额的杠杆倍数无法保持稳定。也正是因为这种静态的配对结构，两级份额不能单独申赎，参考净值无法实时兑现，折溢价率的易变性进一步加剧了B级份额实际杠杆（价格杠杆）的不稳定性。如果分级杠杆基金采用定期折算的方式来维护两级份额的杠杆倍数（初始杠杆倍数），即依据两级份额的参考净值“切除”多余配对的部分折算为基础份额，被动实现两级份额借贷规模的调整，这样也可能造成两级份额流通数量的持续减少以及折算前

后折溢价率的突变。

图5：静态配对结构导致的杠杆倍数不稳定



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

杠杆型ETF是通过全收益互换、期货合约等工具来合成所需的正向与反向杠杆，能够比较准确的跟踪标的资产在设定时间段内（通常为日）收益率一定的倍数，同时又可实时申购赎回，有效解决了分级杠杆基金杠杆倍数不稳定以及折溢价率波动过大的缺陷。

杠杆型ETF也可以被视为一种“灵动”的分级杠杆基金，凭借工具合成杠杆的灵活性，将“A级份额”的角色从原先绑定的配对关系中虚化或者抽离，即按固定份额配比方式绑定的两级关系得以解锁。“B级份额”可以随时寻找所需的“A级份额”并动态调整所需的数量，或者说已经不再需要具体的、指定的“A级份额”，真正实现稳定的杠杆倍数。此外，相比于分级杠杆基金的B级份额，杠杆型ETF通过工具合成杠杆也能进一步降低“借贷交易”中产生的资金成本。

1.4 公募基金产品的工具化时代

回顾公募基金产品的发展路径，从单一的主动型股票产品逐渐发展为覆盖各大类资产丰富的产品线，在产品设计和营销方式上从热点行业、主题投资、明星基金经理效应等逐渐转向被动型产品和固定收益类产品。一方面，市场定价有效性的提高以及做空工具的日益丰富都使得长期稳定获取超额收益变得越来越困难；另一方面，普通投资者对于交易工具的需求却日益增强，这些变化都促使公募基金的角色从传统的ALPHA创造者逐渐转变为工具制造者。

从过去5年指数基金与ETF的大发展，分级杠杆基金的大量涌现，到去年固定收

益类产品的热卖，到最近出现的几类创新型、交易型货币基金，以及即将问世的杠杆型ETF等都表明公募基金产品已经进入产品工具化时代。

基金管理人凭借专业优势，通过合成、分解等手段提供交易工具，降低普通投资者参与这些交易工具所需的资金门槛、费用成本以及管理技能。基金管理人提供交易工具，这也可以认为是基金管理人在提供一种“通道”服务，通过类似批发零售或者批发加工再零售的方式向普通投资者提供工具化产品，并收取合理的“通道”费用。

二、杠杆型 ETF 的价值波动路径

2.1 杠杆构建方式

杠杆型ETF通常是使用股票现货、场外互换协议以及期货合约等工具来合成所需的目标杠杆倍数，股票现货用于正向杠杆型产品基本暴露度的复制，场外互换协议承担了杠杆合成的主要职能，期货合约增强了投资组合日常调整的灵活性。

A股市场目前能够用于构建杠杆型ETF的工具包括股票现货、融资融券和股指期货，但融资融券目前并不是构建杠杆型ETF的好选择。首先，杠杆的制造能力有限。依据交易所的相关规定，在融资融券交易中权益类资产作为质押物的最高折算比例为90%，对应的券商所要求的最低保证金比例为60%（150%-90%），因此融资交易所能提供的最大正向杠杆仅为2.5倍（1+90%/60%），而融券交易所能提供的最大反向杠杆仅为2倍。其次，参与融资融券交易所需支付的利息费用相对较高，基本都维持在8%以上，因此杠杆的维护费用很高。其三，融资融券的业务规模受到余额管理的控制和市场流动性供给的限制。最后，融资融券交易中的风险控制与资金管理相对复杂，特别是正向杠杆达到最大值2.5倍是以全部使用权益类资产作为质押物并耗尽所有可用保证金为条件的，因此一般情况下基金管理不会做这样的选择。

基于以上分析，股指期货成为基金管理人构建杠杆型ETF唯一的选择。对于正向杠杆型产品，选择纯期货方案或者现货+期货的方案同样可行；而对于反向杠杆型产品，选择纯期货方案则最为便捷。

2.2 价值波动路径模型

为了简化分析，我们假设基金管理人对于反向及正向杠杆型ETF均采用纯期货方案来构建。

令所需跟踪的标的指数在t时刻的价格为I_t，并假设I_t的波动服从GBM，即：

$$dI_t = I_t \cdot \mu_I \cdot dt + I_t \cdot \sigma_I \cdot dZ_{I,t}, \qquad dZ_{I,t} \sim N(0, dt) \qquad \text{式(4)}$$

其中：μ_I, σ_I 分别为标的指数单位时间的期望收益率与波动率。

令标的指数对应的、到期日为 $T'(T' > t)$ 的期货合约 t 时刻的价格为 $F_t^{T'}$，并假设 $F_t^{T'}$ 能满足持货成本模型的定价要求，那么由 $dF_t^{T'} = \frac{\partial F_t^{T'}}{\partial I_t} dI_t + \frac{\partial F_t^{T'}}{\partial t} dt$ 可以得到：

$$dF_t^{T'} = F_t^{T'} \left(\frac{dI_t}{I_t} + q - r_f \right) \qquad \text{式(5)}$$

其中：q 为标的指数的股息率，r_f 为适用的无风险利率。

令杠杆型ETF的目标杠杆倍数为 $M\ (M < 0, M > 1)$，期货合约适用的保证金比例为 $\lambda \in (0,1)$。为了满足所需的目标杠杆倍数，杠杆型ETF对期货合约 t 时刻的配置比例 ω_t^F 必须满足：

$$\omega_t^F \frac{dF_t^{T'}}{F_t^{T'}} + (1 - \omega_t^F \cdot \lambda) r_f \cdot dt = M \frac{dI_t}{I_t}, \qquad \omega_t^F \le \frac{1}{\lambda} \qquad \text{式(6)}$$

那么由式（6）可以得到：

$$\omega_t^F = \frac{M \cdot \mu_I - r_f + M \cdot \sigma_I \frac{dZ_{I,t}}{dt}}{\mu_I + q - (\lambda + 1) \cdot r_f + \sigma_I \frac{dZ_{I,t}}{dt}} \qquad \text{式(7)}$$

由式（7）可知 ω_t^F 无法准确估计，那么取其极限就有 $\lim_{dt \to 0^+} \omega_t^F = M$。

令杠杆型ETF在 t 时刻的组合价值为 V_t^F，那么由以上结论就可以将组合价值 V_t^F 的波动表述为：

$$\frac{dV_t^F}{V_t^F} = M \frac{dF_t^{T'}}{F_t^{T'}} + (1 - M \cdot \lambda) r_f \cdot dt \qquad \text{式(8)}$$

假设杠杆型ETF在 $t = 0$ 时刻的组合价值 V_0^F 已知，那么我们只要联立式（4）、式（5）和式（8）就能解得杠杆型ETF在 $t(t > 0)$ 时刻的组合价值 V_t^F：

$$V_t^F = V_0^F \left(\frac{I_t}{I_0}\right)^M \exp\left(\left[M\left(q - M\cdot\lambda\cdot r_f\right) - \frac{M(M-1)}{2}\sigma_I^{\,2}\right]t\right) \qquad \text{式(9)}$$

由式（9）可知，以期货合约合成杠杆与直接对标的指数构建杠杆对组合价值的影响仅为相差一项系数，即 $\exp\left(M\left(q - M\cdot\lambda\cdot r_f\right)t\right)$，且该系数与标的指数的波动没有直接关联。同时，有关期货合约的定价问题也并非是本文所要研究的重点，为了方便分析，我们将式（9）简化为：

$$V_t^I = V_0^I \left(\frac{I_t}{I_0}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}\sigma_I^{\,2}\cdot t\right) \qquad \text{式(10)}$$

在式（9）和式（10）中都隐含了标的指数波动率 σ_I 在持有期限 $[0,t]$ 内为常数的假设，为了能更好的反映时变波动率对组合价值的影响，我们将持有期限切分为等长的 N 个子区间，每个子区间的长度均为 $\Delta t = \frac{t}{N}$。我们假定在第 $s \in [1,2,\cdots,N]$ 个子区间 $[(s-1)\Delta t, s\cdot\Delta t]$ 内标的指数的波动率 $\sigma_I(s,\Delta t)$ 为常数，那么在每一个子区间内式（10）总能成立，由此便可以形成以下的递推关系：

$$\begin{cases} V_{\Delta t}^I = V_0^I \left(\frac{I_{\Delta t}}{I_0}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}(\sigma_I(1,\Delta t))^2\cdot\Delta t\right) \\ V_{2\Delta t}^I = V_{\Delta t}^I \left(\frac{I_{2\Delta t}}{I_{\Delta t}}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}(\sigma_I(2,\Delta t))^2\cdot\Delta t\right) \\ \quad\vdots \\ V_{t-\Delta t}^I = V_{t-2\Delta t}^I \left(\frac{I_{t-\Delta t}}{I_{t-2\Delta t}}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}(\sigma_I(N-1,\Delta t))^2\cdot\Delta t\right) \\ V_t^I = V_{t-\Delta t}^I \left(\frac{I_t}{I_{t-\Delta t}}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}(\sigma_I(N,\Delta t))^2\cdot\Delta t\right) \end{cases} \qquad \text{式(11)}$$

由式（11）就可以得到：

$$V_t^I = V_0^I \left(\frac{I_t}{I_0}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}\sum_{s=1}^{N}(\sigma_I(s,\Delta t))^2\cdot\Delta t\right) \qquad \text{式(12)}$$

令 $\sigma_{I,s} = \lim_{\Delta t\to 0^+}\sigma_I(s,\Delta t)$，$\sigma_{I,s}$ 即表示标的指数在 $s\in[0,t]$ 时刻真实的瞬时波动率，那么对式（12）令 $\Delta t \to 0^+$，就能得到反映时变波动率特征的组合价值，即杠杆型ETF的价值波动路径模型：

$$V_t^I = V_0^I \left(\frac{I_t}{I_0}\right)^M \exp\left(-\frac{M(M-1)}{2}\int_{s=0}^{s=t}\sigma_{I,s}^{\,2}\cdot ds\right) \qquad \text{式(13)}$$

由式（13）可知，杠杆型ETF持有期末的组合价值受到目标杠杆倍数和标的指数波动特征的影响，目标杠杆倍数是完全外生给定的，而标的指数波动特征的影响又包括标的指数的期末涨幅和标的指数期间瞬时波动率的变动两个方面，因此杠杆型ETF持有期末的组合价值并非完全是由标的指数的期末涨幅确定的，而是还依赖于标的指数瞬时波动率的波动路径。这里需要注意的是标的指数瞬时波动率的波动路径并非完全等同于标的指数价格的波动路径。

2.3 模型的适用性检验

价值波动路径模型能有助于我们分析杠杆型ETF的价值波动特征，但该模型是以连续时间过程下的组合调整为假设的，而在现实环境中组合调整必然是在离散时间过程下进行的，因此在继续下面的研究之前我们必须要先检验该模型对现实环境的适用性。

通常将式（13）中的$\int_{s=0}^{s=t}\sigma_{I,s}^{2}\cdot ds$定义为标的指数在持有期限$[0,t]$内的积分波动率（Integrated Volatility），积分波动率是对路径中真实波动率的一种准确度量。同样的，基于方差的可加性我们也能定义标的指数在持有期限$[0,t]$内平均波动率的准确度量$\bar{\sigma}_{I,[0,t]}=\sqrt{\frac{\int_{s=0}^{s=t}\sigma_{I,s}^{2}\cdot ds}{t}}$。但由于真实的瞬时波动率$\sigma_{I,s}$无法直接观测，因此积分波动率与平均波动率的真值一般也无法得到。

已实现波动率（Realized Volatility）是通过加总某一频率下（对数）收益率的平方值来得到对积分波动率的一个估计。从已有的研究结论来看，只要数据抽样的频率足够高，那么已实现波动率将依概率收敛于积分波动率，即已实现波动率是积分波动率的一致估计量。

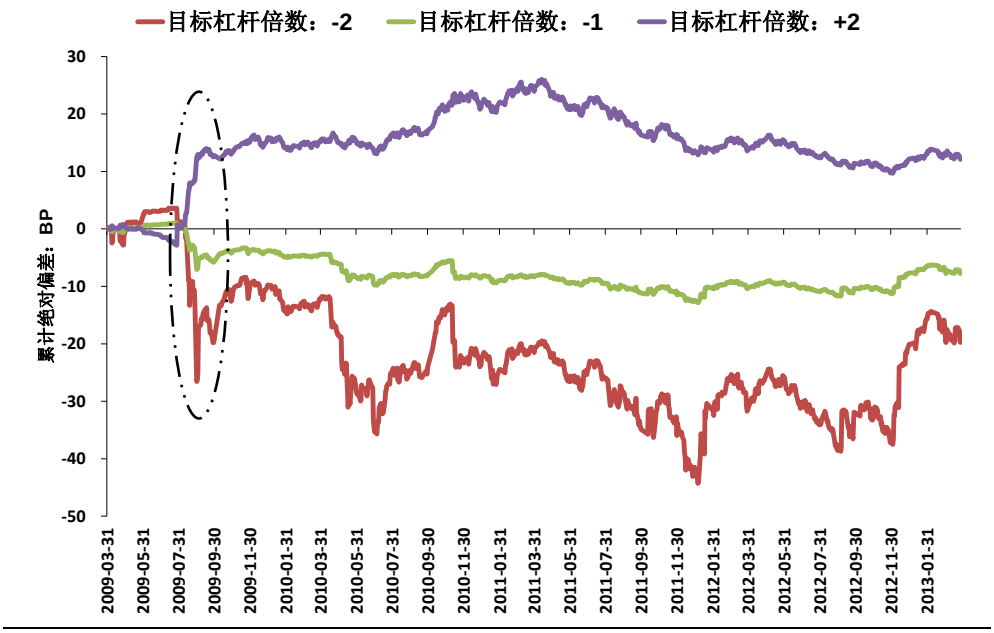
既然杠杆型ETF一般是在日收益率维度下跟踪标的指数，同时我们的目的只是检验该模型对组合价值波动过程描述的准确性，而并非是为了预测组合价值的变动。出于简化分析的考虑，在以下的适用性检验中我们将使用日频率下的已实现波动率作为积分波动率的近似估计，并以按日调仓的杠杆型组合作为比较基准。

我们以沪深300指数为标的指数，检验区间设定为2009-04-01至2013-03-29，总计972个交易日。标的指数在检验区间首尾处的收盘价接近，2009-03-31收盘2507.789，2013-03-29收盘2495.083。

我们设定杠杆型组合期初（2009-03-31）单位净值$V_0=1$，分别计算当目标杠杆为反向2倍、反向1倍和正向2倍时由价值波动路径模型计算的t日单位净值$\hat{V}_t^I$（估计值）与按日调仓计算的t日单位净值$V_t^{I,d}$（实际值），并定义价值波动路径模型的

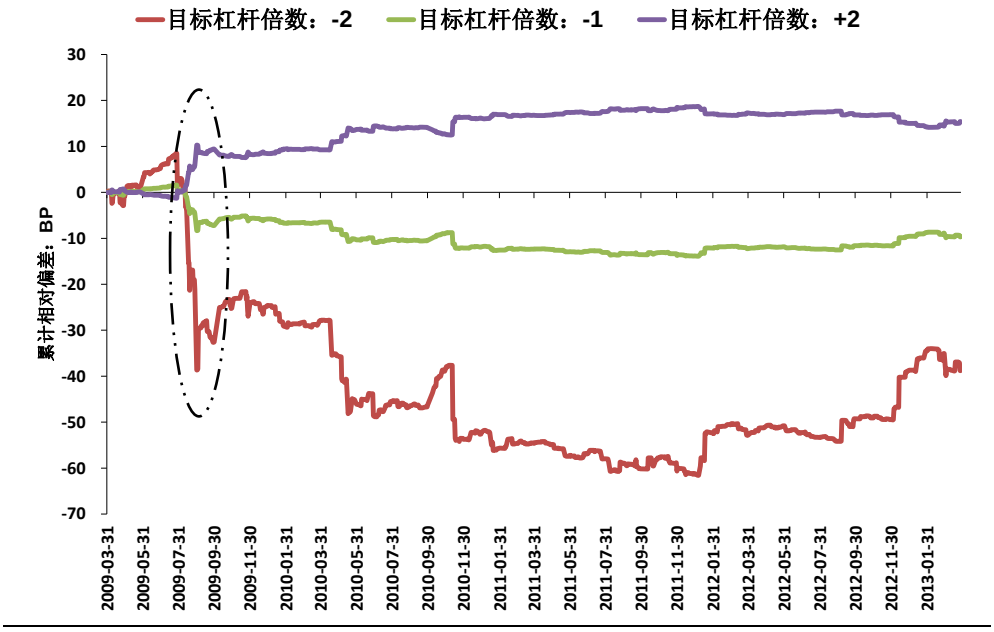
t 日累计绝对偏差 $\theta_t^A = \hat{V}_t^I - V_t^{I,d}$ 与 t 日累计相对偏差 $\theta_t^R = \hat{V}_t^I / V_t^{I,d} - 1$。

图6：价值波动路径模型的累计绝度偏差



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

图7：价值波动路径模型的累计相对偏差



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

模型适用性检验的结果分析：

（1）图6、图7显示的累计估计偏差是当起点锁定后每日新增估计偏差与累计传递偏差叠加后的结果，因此累计估计偏差与检验区间的选择有关。

（2）在估计偏差持续累计与传递的972个交易日中，反向2倍杠杆所对应的最大累计绝对（相对）偏差为44.28bp（61.58bp），反向1倍杠杆所对应的最大累计绝对（相对）偏差为12.86bp（13.91bp），正向2倍杠杆所对应的最大累计绝对（相对）偏差为26.04bp（18.71bp），因此从检验结果的数值上来看价值波动路径模型对日调仓组合的净值估计具有适用性。

（3）模型的累计估计偏差来自于两方面的贡献，即连续与离散时间过程下组合调整的差异和对标的指数波动率的估计偏差，后者的贡献又反映在以下2个层面上：

（a）当标的指数的波动率急速放大时，价值波动路径模型的估计偏差也会随即放大。图6、图7中黑色虚圈标注的位置对应于2009-7-29至2009-9-3的27个交易日，期间标的指数累计下跌18.74%，日均涨跌幅2.61%。在27个交易日中，单日涨跌幅超过3%的有9日（2涨7跌），超过4%的有7日（2涨5跌），超过5%的有2日，超过6%的也有2日。

（b）标的指数波动率的估计偏差通过系数$\left|M\left(M-1\right)\right|$予以放大：对于同向杠杆型组合，目标杠杆倍数的取值越大，那么价值波动路径模型的估计偏差也就越大；对于相同的目标杠杆倍数取值，那么价值波动路径模型对反向杠杆型组合的净值估计偏差要高于对正向杆型组合的净值估计偏差。

（4）价值波动路径模型倾向于高估正向杠杆型组合的单位净值，而低估反向杠杆型组合的单位净值。

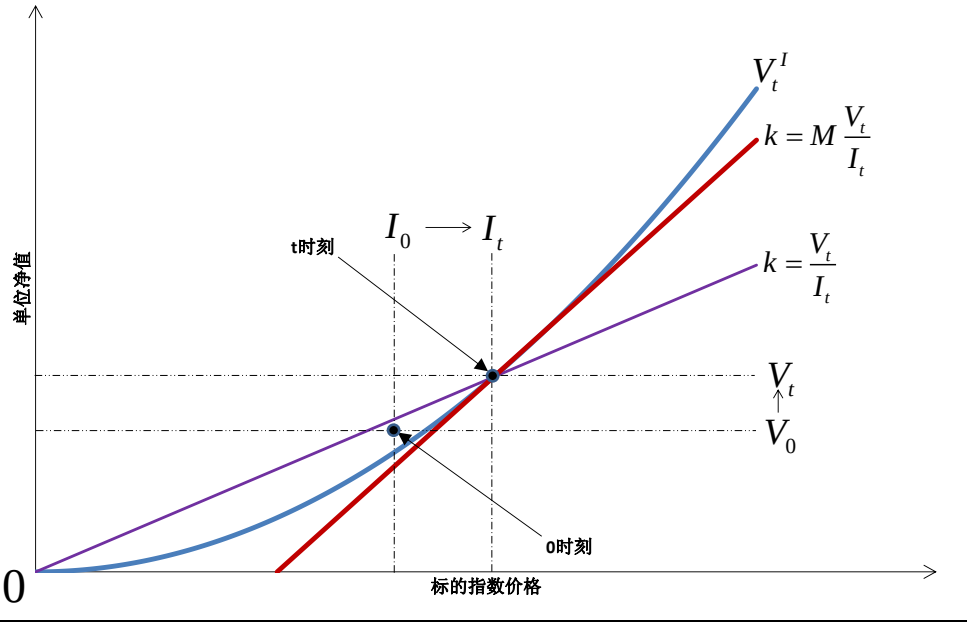
三、杠杆型 ETF 持有收益率的分解

依据产品价值与定价参数的关系，我们一般可以将产品划分为线性与非线性两类，由价值波动路径模型可以看出杠杆型ETF应当属于非线性产品。为了更加细致的分析杠杆型ETF的价值波动特征，我们就需要将其价值变动ΔV_t^I分解后逐项来进行分析，ΔV_t^I的（近似）分解形式可表述为：

$$\Delta V_t^I \approx \frac{\partial V_t^I}{\partial I_t}\Delta I_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^I}{\partial I_t^2}(\Delta I_t)^2 + \frac{\partial V_t^I}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial V_t^I}{\partial \sigma_{I,t}}\Delta\sigma_{I,t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_t^I}{\partial \sigma_{I,t}^2}(\Delta\sigma_{I,t})^2 \quad \text{式(14)}$$

3.1 线性变动与切线特征

图8：组合价值变动的切线特征<正向杠杆型组合>



数据来源：广发证券发展研究中心

如图8所示，对于任意给定的t时刻都会唯一的对应一条标的指数价格I_t与组合价值V_t^I构成的轨迹（蓝色曲线），在该轨迹上经过当期位置$\left(V_t^I, I_t\right)$的切线（红色直线）反映了由标的指数的价格变动所引发的组合价值的线性变动部分$\frac{\partial V_t^I}{\partial I_t}\Delta I_t$，那么由式（13）可知：

$$Delta_t = \frac{\partial V_t^I}{\partial I_t} = M\frac{V_t^I}{I_t} \quad \text{式(15)}$$

由式（15）可知，无论组合价值如何随标的指数的价格滑动，经过当前位置的切线斜率始终保持为当前位置与原点连线（紫色直线）斜率的M倍，反映了目标杠杆倍数的取值对组合价值线性变动速度的影响。

3.2 Gamma 与 Theta

与线性变动部分不同，由标的指数的价格变动所引发的组合价值的非线性变动仅与标的指数的价格变动幅度有关，而与标的指数的价格变动方向无关，由式（15）可知：

$$Gamma_t = \frac{\partial^2 V_t^I}{\partial I_t^2} = M(M-1)\frac{V_t^I}{I_t^2} > 0 \quad \text{式(16)}$$

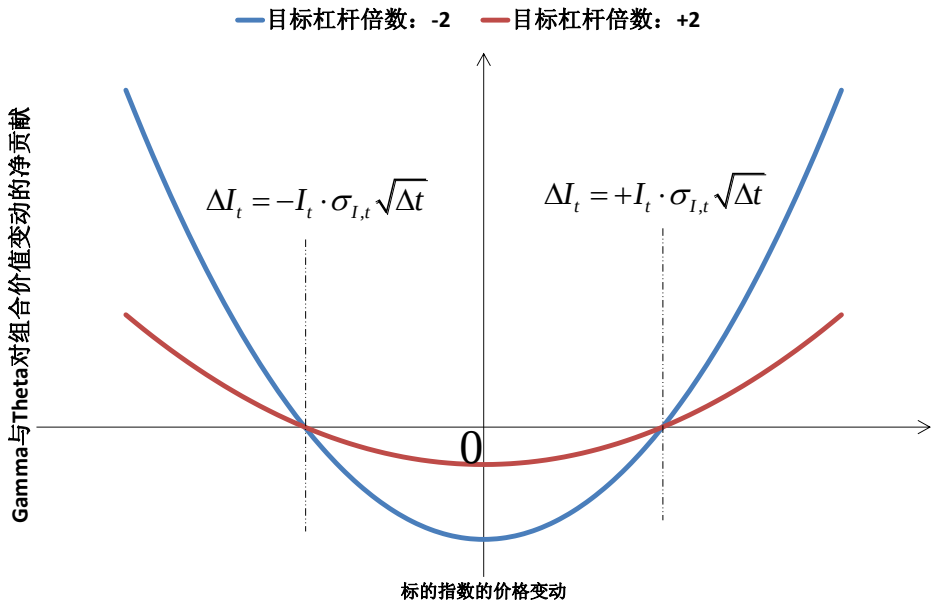
由式（16）可知，杠杆型ETF具有多头Gamma特征，即做多标的指数的价格变动幅度，无论标的指数的价格往哪个方向变动都能增加持有收益，因此对于持有人来说这种多头Gamma特征是一种红利。但获取这种持有红利并非没有代价，持有人为此需要付出一定的“租金”成本，即时间价值的耗损Theta，那么Gamma与Theta就形成了一对方向相反的“伴生关系”，那么由式（13）可知：

$$Theta_t = \frac{\partial V_t^I}{\partial t} = -\frac{M(M-1)}{2} V_t^I \cdot \sigma_{I,t}^2 < 0 \quad \text{式(17)}$$

由式（17）可知：当目标杠杆倍数的取值给定时，标的指数波动率的存在就成为了杠杆型ETF时间价值耗损的主因，合并式（16）和式（17）就能得到Gamma和Theta对组合价值变动的净贡献 R_t^{G-T}：

$$R_t^{G-T} = \frac{\frac{1}{2}Gamma \cdot (\Delta I_t)^2 + Theta \cdot \Delta t}{V_t} = \frac{M(M-1)}{2}[(\frac{\Delta I_t}{I_t})^2 - \sigma_{I,t}^2 \cdot \Delta t] \quad \text{式(18)}$$

图9：Gamma和Theta对组合价值变动的净贡献



数据来源：广发证券发展研究中心

由式（18）可知，只要标的指数在 Δt 到期时的价格变动幅度 $|\Delta I_t|$ 大于由标的指数波动率确定的临界幅度 $I_t \cdot \sigma_{I,t}\sqrt{\Delta t}$，那么Gamma和Theta就能形成对组合价值

变动正向的净贡献。如果假设 $\frac{\Delta I_t}{I_t} \sim N\left(\mu_{I,t}\cdot\Delta t, {\sigma_{I,t}}^2\cdot\Delta t\right)$，那么Gamma和Theta对组合价值变动的净贡献为正的概率为：

$$\Pr\left[R_t^{G-T}>0\right]=\Phi\left(\frac{\mu_{I,t}}{\sigma_{I,t}}\sqrt{\Delta t}-1\right)+\Phi\left(-\frac{\mu_{I,t}}{\sigma_{I,t}}\sqrt{\Delta t}-1\right) \quad \text{式(19)}$$

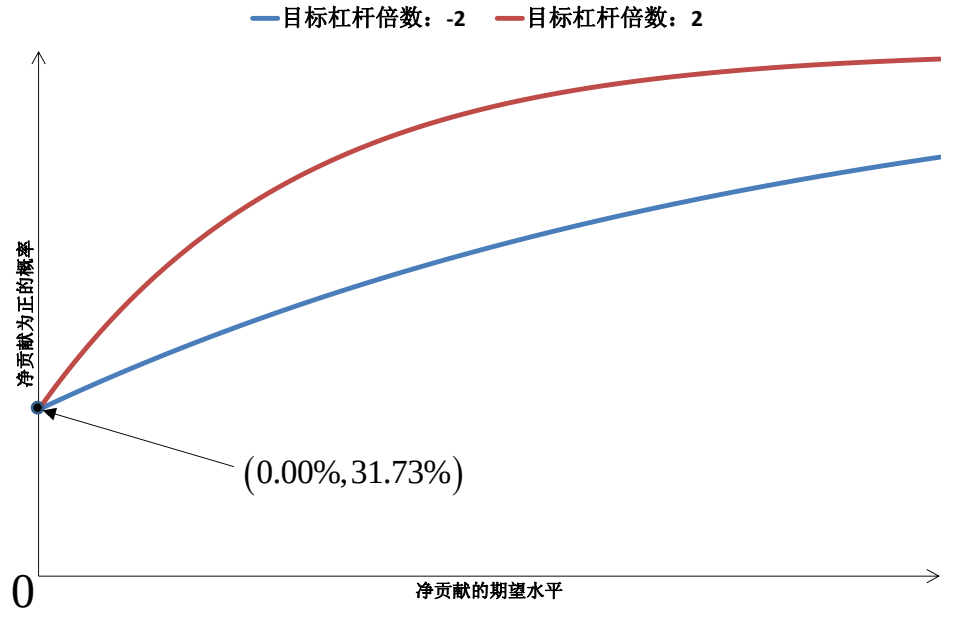
Gamma和Theta对组合价值变动净贡献的期望水平为：

$$E\left[R_t^{G-T}\right]=\frac{M(M-1)}{2}(\mu_{I,t}\cdot\Delta t)^2 \quad \text{式(20)}$$

由式（19）和式（20）就能得到净贡献为正的概率与净贡献期望水平的对应关系：

$$\Pr\left[R_t^{G-T}>0\right]=\Phi\left(\sqrt{\frac{2\cdot E\left[R_t^{G-T}\right]}{M(M-1){\sigma_{I,t}}^2\cdot\Delta t}}-1\right)+\Phi\left(-\sqrt{\frac{2\cdot E\left[R_t^{G-T}\right]}{M(M-1){\sigma_{I,t}}^2\cdot\Delta t}}-1\right) \quad \text{式(21)}$$

图10：净贡献为正的概率与净贡献期望水平的对应关系



数据来源：广发证券发展研究中心

综上所述：

（1）杠杆型ETF具有多头Gamma特征，对组合价值形成了一种向上的拉升作用，对于持有人来说是一种红利。由于标的指数波动率的存在，Theta对组合价值形成了一种向下的拖拽作用，即获取Gamma红利需要支付Theta成本，因此Gamma与Theta对组合价值变动的净贡献本质上就是两

种力量相互“角力”的结果。

（2）如果我们定义持续时间为Δt的一场“赌局”，那么Theta就是单位时间内持有人需要下注的本金，只要标的指数在Δt到期时的价格变动幅度能够大于由标的指数波动率确定的临界幅度就能赢回本金并取得正回报。

（3）如果假设标的指数的价格波动服从正态分布且参数估计无偏，那么Gamma与Theta对组合价值变动的净贡献为正的概率不低于31.73%，净贡献的期望水平非负，且两者均与标的指数瞬时期望收益率的幅度$|\mu_{I,t}|$正相关。

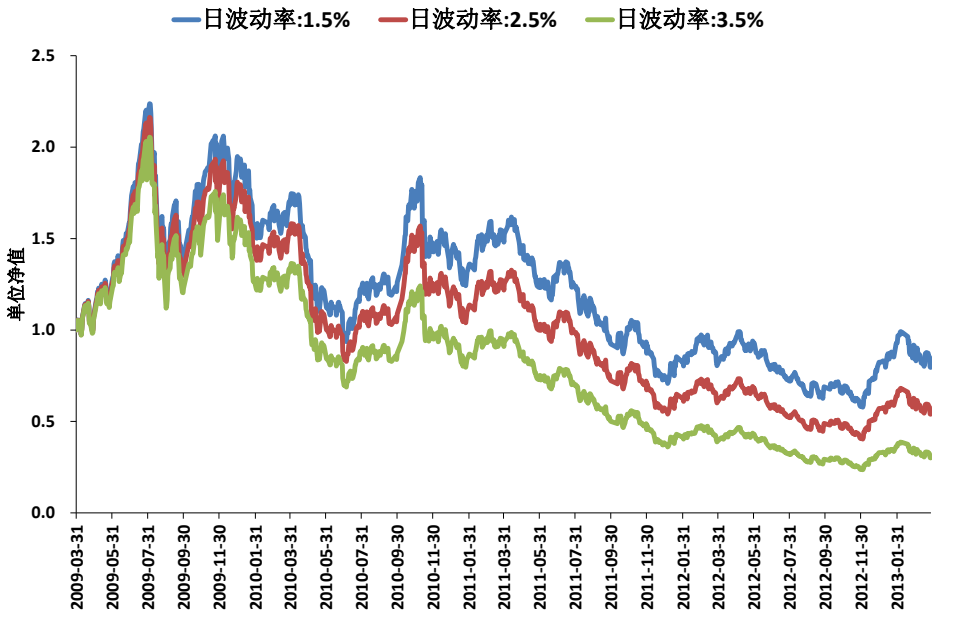
3.3 波动率与波动率的波动

不仅标的指数波动率的存在会对组合价值形成一种向下的拖拽作用，而且标的指数波动率的时变性也会对组合价值的变动产生影响，由式（13）可知：

$$Vega_t = \frac{\partial V_t^I}{\partial \sigma_{I,s}} = -M(M-1)V_t^I \cdot \sigma_{I,s} \cdot \Delta t < 0 \qquad \text{式(22)}$$

由式（22）可知，杠杆型ETF具有空头Vega特征，即做空标的指数的波动率，因此标的指数波动率的高企将耗损组合价值。

图11：标的指数波动率的变化对组合价值的影响<正向2倍杠杆>



数据来源：Wind资讯、广发证券发展研究中心

由式（22）又可以得到:

$$\frac{\partial Vega_t}{\partial \sigma_{I,s}} = \frac{\partial^2 V_t^I}{\partial \sigma_{I,s}^2} = -M(M-1)V_t^I \cdot \Delta t < 0 \quad \text{式(23)}$$

由式（23）可知，杠杆型ETF不仅是做空标的指数的波动率，而且也做空标的指数波动率的波动。

结合式（22）和式（23）可知，杠杆型ETF做空标的指数波动率与波动率波动的强度是通过系数$|M(M-1)|$来放大的，即对于同向杠杆型组合，目标杠杆倍数的取值越大，做空的强度也就越大；对于相同的目标杠杆倍数取值，反向杠杆型组合的做空强度要高于正向杠杆型组合的做空强度。

3.4 持有收益率的分解

结合式（14）、式（15）、式（16）、式（17）、式（22）和式（23）就能得到杠杆型ETF持有收益率的（近似）分解形式:

$$\frac{\Delta V_t^I}{V_t^I} \approx M\frac{\Delta I_t}{I_t} + \frac{M(M-1)}{2}V_t[(\frac{\Delta I_t}{I_t})^2 - \sigma_{I,t}^2 \cdot \Delta t] - M(M-1)[\sigma_{I,s} \cdot \Delta\sigma_{I,s} + \frac{(\Delta\sigma_{I,s})^2}{2}]\Delta t \quad \text{式(24)}$$

风险提示

本文中所涉及的假设以及基于假设所构建的模型，均是对所要研究问题的主要矛盾以及矛盾主要方面的一种抽象，因此模型以及基于模型所得出的相关结论并不能完全准确的刻画现实环境与预测未来。

广发金融工程研究小组

罗　军：　首席分析师，华南理工大学理学硕士，2010 年进入广发证券发展研究中心。
俞文冰：　首席分析师，CFA，上海财经大学统计学硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。
叶　涛：　资深分析师，CFA ，上海交通大学管理科学与工程硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。
安宁宁：　资深分析师，暨南大学数量经济学硕士，2011 年进入广发证券发展研究中心。
胡海涛：　分析师， 华南理工大学理学硕士， 2010 年进入广发证券发展研究中心。
夏潇阳：　分析师， 上海交通大学金融工程硕士， 2012 年进入广发证券发展研究中心。
汪　鑫：　分析师， 中国科学技术大学金融工程硕士， 2012 年进入广发证券发展研究中心。
蓝昭钦：　分析师， 中山大学理学硕士， 2010 年进入广发证券发展研究中心。
史庆盛：　研究助理， 华南理工大学金融工程硕士， 2011 年进入广发证券发展研究中心。
张　超：　研究助理， 中山大学理学硕士，2012 年进入广发证券发展研究中心。

广发证券—行业投资评级说明

买入：　预期未来 12 个月内，股价表现强于大盘 10%以上。
持有：　预期未来 12 个月内，股价相对大盘的变动幅度介于-10%～+10%。
卖出：　预期未来 12 个月内，股价表现弱于大盘 10%以上。

广发证券—公司投资评级说明

买入：　预期未来 12 个月内，股价表现强于大盘 15%以上。
谨慎增持：　预期未来 12 个月内，股价表现强于大盘 5%-15%。
持有：　预期未来 12 个月内，股价相对大盘的变动幅度介于-5%～+5%。
卖出：　预期未来 12 个月内，股价表现弱于大盘 5%以上。

联系我们

	广州市	深圳市	北京市	上海市
地址	广州市天河北路 183 号大都会广场 5 楼	深圳市福田区金田路 4018 号安联大厦 15 楼 A 座 03-04	北京市西城区月坛北街 2 号月坛大厦 18 层	上海市浦东新区富城路 99 号震旦大厦 18 楼
邮政编码	510075	518026	100045	200120
客服邮箱	gfyf@gf.com.cn			
服务热线	020-87555888-8612			

免责声明

广发证券股份有限公司具备证券投资咨询业务资格。本报告只发送给广发证券重点客户，不对外公开发布。
本报告所载资料的来源及观点的出处皆被广发证券股份有限公司认为可靠，但广发证券不对其准确性或完整性做出任何保证。报告内容仅供参考，报告中的信息或所表达观点不构成所涉证券买卖的出价或询价。广发证券不对因使用本报告的内容而引致的损失承担任何责任，除非法律法规有明确规定。客户不应以本报告取代其独立判断或仅根据本报告做出决策。
广发证券可发出其它与本报告所载信息不一致及有不同结论的报告。本报告反映研究人员的不同观点、见解及分析方法，并不代表广发证券或其附属机构的立场。报告所载资料、意见及推测仅反映研究人员于发出本报告当日的判断，可随时更改且不予通告。
本报告旨在发送给广发证券的特定客户及其它专业人士。未经广发证券事先书面许可，任何机构或个人不得以任何形式翻版、复制、刊登、转载和引用，否则由此造成的一切不良后果及法律责任由私自翻版、复制、刊登、转载和引用者承担。